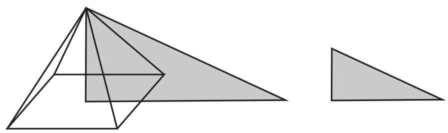
Twierdzenie Talesa[10] i twierdzenie do niego odwrotne

Kolejne twierdzenie geometrii elementarnej, jedno ze słynniejszych, zwyczajowo przypisywane jest Talesowi. Rozpoczniemy od historii zmierzenia wysokości piramidy egipskiej, co chyba było zasługą Talesa (pięknie opisał to Szczepan Jeleński w [SJ_Pitagoras]). To zadanie może być punktem startowym lekcji o twierdzeniu Talesa – zapytajmy uczniów o ich propozycje jego rozwiązania. Warto nieco dłużej zająć się ideą obliczenia wysokości piramidy egipskiej na podstawie długości jej cienia, ważne jest tutaj założenie równoległości promieni słonecznych (wynika z tego podobieństwo szarych trójkątów).



Podobnie jak w przypadku innych twierdzeń geometrii, nie podajemy tutaj dowodów twierdzenia Talesa i twierdzenia do niego odwrotnego. Do twierdzeń tych wrócimy w rozdziale VI.

Podobieństwo figur płaskich

Podobieństwo figur, mimo intuicyjnego charakteru, nie jest pojęciem łatwym do zdefiniowania. Pojawia się w szkole ponadpodstawowej w związku z twierdzeniem Talesa. O figurach podobnych najczęściej mówi się, że mają jednakowy kształt, ale mogą się różnić wielkością. Pojawia się także skala podobieństwa, która pozwala obliczyć, jak zmieniają się obwody, pola i objętości figur podobnych. Niestety, obecnie w szkole przemilcza się funkcyjny aspekt podobieństwa; szerzej napiszemy o tym w rozdziale VIII, ale w klasach o profilu matematycznym warto zasygnalizować, że podobieństwo figur leżących na płaszczyźnie jest złożeniem jednokładności i izometrii, z kolei izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych. Więcej o podobieństwie można przeczytać w rozdziale VI.

---

[10] Tales z Miletu (~624–625 p.n.e.–~545–547 p.n.e.), grecki uczony zajmujący się filozofią, matematyką i astronomią. Uważa się, że Tales zainicjował wyjaśnianie rzeczywistości przez odwoływanie się do natury i rozumu bardziej niż do mitologii i tradycji. Tales wprowadził pojęcia: średnicy (odcinek, który dzieli okrąg na połowy), trójkąta równoramiennego (taki trójkąt ma kąty przy podstawie równe), kątów wierzchołkowych. Tales zauważył, ze kąt wpisany w półokrąg jest kątem prostym (w Anglii właśnie to twierdzenie jest nazywane twierdzeniem Talesa). Twierdzenie, o którym piszemy w tym podrozdziale, było znane Talesowi, ale nie pozostały żadne ślady, że to on podał jego dowód.

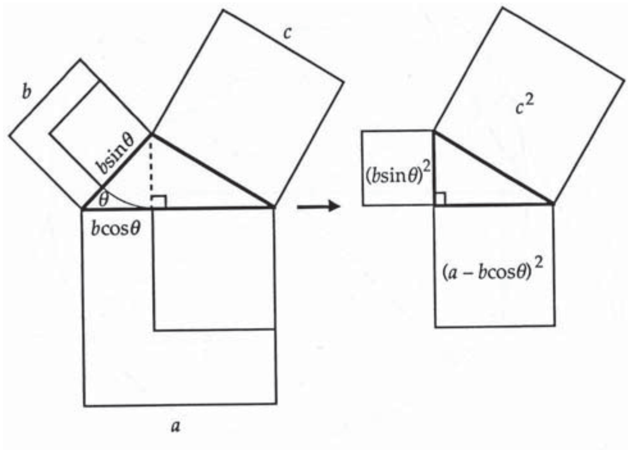
Trygonometria

W szkole ponadpodstawowej trygonometria ma głównie obliczeniowy charakter, sporo lekcji dotyczy tzw. rozwiązywania trójkąta (obliczanie miar kątów trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych). Omawia się także: wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych, korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych, rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach podanych w PPM dla zakresu rozszerzonego (s. 18).

Nie będziemy wchodzić w problematykę funkcji trygonometrycznych, ale niektórzy uczniowie mogliby zająć się projektem *Funkcje trygonometryczne* mówiącym o tym, że funkcje trygonometryczne są rozwiązaniami pewnych równań funkcyjnych (patrz *Zagadnienia do dyskusji nr 5*, s. 129).

Ćwiczenia

1. Poszukaj w książkach, w Internecie różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia do niego odwrotnego. Zaadaptuj jeden z dowodów obu twierdzeń na potrzeby lekcji matematyki, tzn. wpasuj go do scenariusza lekcji.
2. Podaj dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, gdy kąt α leżący naprzeciw boku o długości c jest ostry (porównaj s. 31).
3. Uzasadnij, że jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy trójkąty równoboczne, to suma pól tych trójkątów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu trójkąta zbudowanego na przeciwprostokątnej. Jakimi innymi figurami można zastąpić trójkąty równoboczne, aby taka własność zachodziła także dla tych figur?
4. Udowodnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie sinusów.
5. W książce [SJ_Pitagoras] znajduje się barwna opowieść, jak Tales dokonał pomiaru odległości statku od brzegu morza. Skorzystaj z tej książki lub znajdź inne źródło i wpleć tę opowieść do lekcji jako starter, gwóźdź programu lekcji lub jako ciekawostkę czy zadanie.
6. Korzystając ze wzorów podanych przez Diofantosa (s. 31–32), podaj wszystkie trójkąty prostokątne, których boki mają długości całkowite nieprzekraczające 30.
7. Spójrz na dowód twierdzenia cosinusów, którego autorem jest Timothy A. Sipka ([Nelsen]).



$$c^2 = (b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Wyjaśnij, na czym polega ten dowód.

Zagadnienia do dyskusji

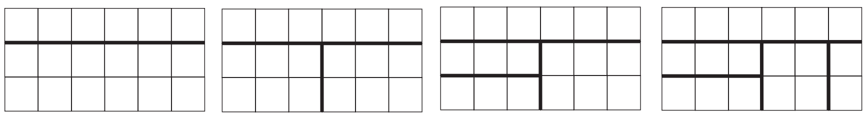
1. W PPM napisano: *Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód.* W PPM podano listę twierdzeń, których dowody uczeń powinien poznać; w zakresie podstawowym na tej liście są twierdzenia sinusów i cosinusów. Nie jest jednak jasne, co to oznacza w praktyce szkolnej – czy „odpytywanie” z dokładnej znajomości dowodów, czy znajomość szkicu dowodów? Co o tym myślisz? Zaplanuj swoją „politykę” w zakresie listy twierdzeń podanej w PPM.
2. Znajdź (np. w Internecie) twierdzenie sinusów dla czworościanów.
3. Przeczytaj fragment książki [SJ_Pitagoras] poświęcony twierdzeniu Pitagorasa (rozdz. *Pitagoriana*). Który z przytoczonych w nim dowodów tego twierdzenia podoba Ci się najbardziej?
4. Napisz esej o trzech słynnych zadaniach starożytności. Wiele informacji znajdziesz na przykład w [Szurek_Opowieści2].

Projekt

5. Jedną z pereł geometrii elementarnej jest twierdzenie Picka – **wzór Picka**, który pozwala w łatwy sposób obliczać pola tzw. **wielokątów kratowych**. W książce

[Wszystkie] można znaleźć podpowiedź, jak „technologicznie naprowadzić" ucznia na ścieżkę prowadzącą do odkrycia tego wzoru.

Projekt **6.** Gra przeznaczona jest dla dwóch osób. Rozgrywka odbywa się na narysowanym na papierze w kratkę prostokącie (nazwijmy ten prostokąt tabliczką czekolady). Zawodnik rozpoczynający (zawodnik A) dzieli czekoladę (w dalszym toku rozgrywki jeden z kawałków czekolady) na dwa mniejsze kawałki wzdłuż linii poziomych kratki, drugi zawodnik (B) też dzieli jeden kawałek czekolady na dwa kawałki, ale wzdłuż linii pionowych. Przegrywa ta osoba, która nie może wykonać ruchu. Spójrz na przykładową rozgrywkę i zastanów się, kto powinien wygrać po dwóch ruchach A oraz B.



Rozegraj kilka partii dla różnych kawałków czekolady (dla różnych prostokątów). Spróbuj odpowiedzieć, kto przy danych wymiarach czekolady, przy założeniu poprawnej gry, powinien wygrać. Zadanie to zaczerpnąłem z [Ziarnko].

Literatura

[SJ_Pitagoras] Jeleński Szczepan, *Śladami Pitagorasa*, WSiP (1995).

[Szurek_Opowieści2] Szurek Michał, *Opowieści geometryczne*, WSiP (1995).

[Wszystkie] Zarzycki Piotr, *Wszystkie twierdzenia małe i duże*, Nowik (2006).

[Ziarnko] *Ziarnko do ziarnka*, CODN, SNM (1993).

[Nelsen] Nelsen Roger B., *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America (1993).

Subiektywny komentarz dotyczący literatury

[SJ_Pitagoras] to piękna książka popularyzująca matematykę. Mnóstwo zadań (czasami niełatwych) i ciekawych opowieści z historii matematyki. Książkę tę i drugie dzieło Pana Jeleńskiego, *Lilavati*, warto wykorzystywać na lekcjach matematyki (także w szkole podstawowej) lub na zajęciach kółka matematycznego.

[Szurek_Opowieści2] to książka popularyzująca znane i mniej znane zagadnienia z geometrii. Zgadzam się z autorem, że książka przyda się na lekcjach matematyki w szkole podstawowej i ponadpodstawowej.

[Wszystkie_twierdzenia] to zbiór artykułów (nieco zmodyfikowanych), które w latach 1996–2003 ukazywały się w czasopiśmie *NiM* (*Nauczyciele i Matematyka*). W książce znajdują się także propozycje 13 projektów dla uczniów.