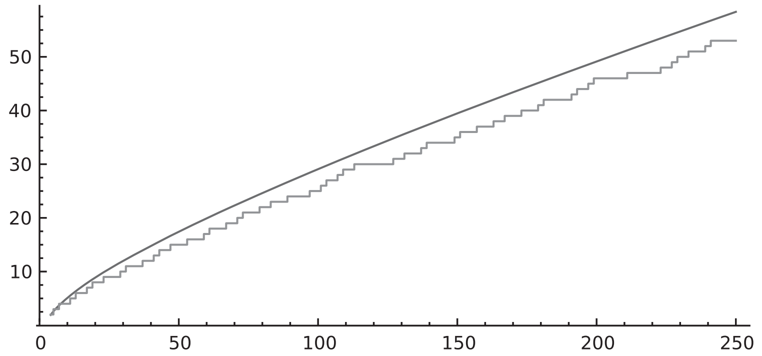
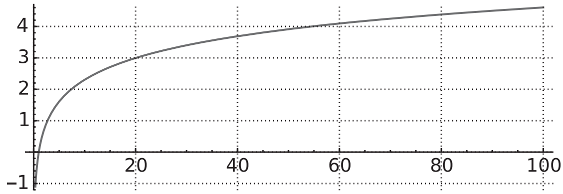


Rysunek 10.2. Wykres schodów $\pi(X)$ i gładkiej krzywej Gaussa $G(X)$

Oznaczmy krzywą Gaussa przez $G(X)$; ma ona elegancki, prosty wzór, zrozumiały dla każdego, kto miał choć trochę do czynienia z analizą matematyczną. Jeśli zgodzimy się, że prawdopodobieństwo tego, że liczba X jest liczbą pierwszą jest odwrotnie proporcjonalne do liczby cyfr tej liczby, to jesteśmy gotowi na spotkanie z krzywą Gaussa. Zatem mamy:

$$G(X) \text{ jest w przybliżeniu proporcjonalne do } \frac{X}{\text{liczba cyfr } X}.$$

Jednakże, aby móc opisać krzywą Gaussa dokładniej, musimy pochylić się nad funkcją *logarytmu naturalnego*[1] „log(X)", która jest elegancką, gładką krzywą zdefiniowaną dla liczb dodatnich X. Wartości funkcji log(X) są, z grubsza biorąc, proporcjonalne do liczby cyfr części całkowitej liczby X.



Rysunek 10.3. Wykres funkcji logarytmu naturalnego log(X)

[1] W matematyce wyższej „zwyczajne" logarytmy (logarytmy o innych podstawach) są tak rzadko spotykane, że prawie zawsze używa się zapisu log(X) w przypadku logarytmu naturalnego zamiast przyjętego kiedyś zapisu ln(X).

Słynna stała Eulera $e = 2{,}71828182\ldots$, która jest granicą ciągu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots,$$

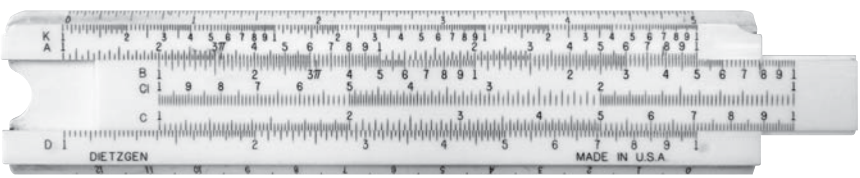
jest podstawą definicji logarytmu naturalnego.

Mianowicie, mówimy, że:

$$\log(X) = A \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } e^A = X.$$

Zanim pojawiły się kalkulatory elektroniczne, logarytmy były często używane do przyspieszenia obliczeń, ponieważ logarytmy przekształcają trudne mnożenia w łatwiejsze dodawanie, które można wykonać mechanicznie. W takich obliczeniach wykorzystuje się fakt, że logarytm iloczynu jest sumą logarytmów czynników tego iloczynu; to znaczy

$$\log(XY) = \log(X) + \log(Y).$$



Rysunek 10.4. Obliczanie iloczynu $2X$ dokonane na suwaku logarytmicznym z wykorzystaniem tego, że $\log(2X) = \log(2) + \log(X)$

Na rysunku 10.4 widać, że liczby zapisane na każdej z przesuwanych części suwaka są rozmieszczone zgodnie z ich logarytmami, tak że gdy przesuwamy suwak, układając go w taki sposób, by widoczna na jednej części suwaka liczba X znalazła się na jednej linii z liczbą 1 na drugiej jego części, otrzymamy, że dla każdej liczby Y umieszczonej na pierwszej części, liczba jej odpowiadająca umieszczona na drugiej części suwaka jest iloczynem XY. Efektem działania suwaka logarytmicznego jest dodanie $\log(X)$ do $\log(Y)$, które daje $\log(XY)$.

W 1791 roku, w wieku 14 lat Gauss dostał książkę zawierającą tablice logarytmiczne liczb naturalnych do 10 milionów i tablicę liczb pierwszych do 10 009. Kilka lat później w liście napisanym w 1849 roku (patrz rysunek 10.5) Gauss stwierdził, że już w 1792 lub 1793 roku zaobserwował, że gęstość występowania liczb pierwszych w przedziałach liczbowych długości X można w przybliżeniu szacować przez $1/\log(X)$.