Jednak wtedy $\langle M\rangle d(d(x))$ jest opisem słowa x, którego długość wynosi co najwyżej

$$|\langle M\rangle| + |d(d(x))| \leq (b-1) + (|d(x)| - b) = |d(x)| - 1.$$

Ten opis x jest krótszy od $d(x)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $d(x)$ jest opisem najkrótszym.

ĆWICZENIA

6.1 Podaj przykład programu w rzeczywistym języku programowania (lub jego sensownym przybliżeniu), który działa zgodnie z duchem twierdzenia o rekurencji i wypisuje siebie samego.

6.2 Wykaż, że dowolny nieskończony podzbiór języka MIN_{TM} nie jest rozpoznawalny w sensie Turinga.

A6.3 Udowodnij, że jeśli $A \leq_{\mathrm{T}} B$ i $B \leq_{\mathrm{T}} C$, to $A \leq_{\mathrm{T}} C$.

6.4 Niech $A_{\mathrm{TM}}' = \{\langle M, w\rangle : M$ jest maszyną Turinga z wyrocznią i $M^{A_{\mathrm{TM}}}$ akceptuje $w\}$. Wykaż, że A_{TM}' jest nierozstrzygalny względem A_{TM}.

A6.5 Czy zdanie $\exists x\ \forall y\ [x+y=y]$ jest elementem Th(N,+)? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Co można powiedzieć o zdaniu $\exists x\ \forall y\ [x+y=x]$?

ZADANIA

6.6 Opisz dwie różne maszyny Turinga M i N, takie że dla dowolnego wejścia M zwraca $\langle N\rangle$, a N zwraca $\langle M\rangle$.

6.7 W wariancie twierdzenia o rekurencji z punktem stałym (twierdzenie 6.8) niech przekształcenie t będzie funkcją zamieniającą miejscami stany q_{accept} i q_{reject} w opisach maszyn Turinga. Podaj przykład punktu stałego przekształcenia t.

***6.8** Udowodnij, że $EQ_{\mathrm{TM}} \not\leq_m \overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$.

A6.9 Użyj twierdzenia o rekurencji, aby podać alternatywny dowód twierdzenia Rice'a z zadania 5.28.

[A]**6.10** Przedstaw model dla zdania

$$\begin{aligned}\phi_{eq} = {} & \forall x\, [R_1(x, x)] \\ & \wedge \forall x, y\, [R_1(x, y) \Leftrightarrow R_1(y, x)] \\ & \wedge \forall x,y,z\, [(R_1(x, y) \wedge R_1(y, z)) \rightarrow R_1(x, z)].\end{aligned}$$

***6.11** Niech ϕ_{eq} będzie zdefiniowane jak w zadaniu 6.10. Podaj model dla zdania

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{lt}} = {} & \phi_{\mathrm{eq}} \\ & \wedge \forall x,y\, \big[\, R_1(x,y) \rightarrow \neg R_2(x,y) \,\big] \\ & \wedge \forall x,y\, \big[\, \neg R_1(x,y) \rightarrow (R_2(x,y) \oplus R_2(y,x)) \,\big] \\ & \wedge \forall x,y,z\, \big[\, (R_2(x,y) \wedge R_2(y,z)) \rightarrow R_2(x,z) \,\big] \\ & \wedge \forall x\, \exists y\, \big[\, R_2(x,y) \,\big].\end{aligned}$$

[A]**6.12** Niech $(\mathcal{N}, <)$ będzie modelem z uniwersum $\mathcal{N}$ i relacją „mniejsze niż”. Wykaż, że Th$(\mathcal{N}, <)$ jest rozstrzygalny.

6.13 Dla każdego $m > 1$ niech $\mathcal{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$ i niech $\mathcal{F}_m = (\mathcal{Z}_m, +, \times)$ będzie modelem, którego uniwersum to $\mathcal{Z}_m$, a relacje to działania + i × obliczane modulo m. Wykaż, że dla każdego m teoria Th$(\mathcal{F}_m)$ jest rozstrzygalna.

6.14 Wykaż, że dla dowolnych języków A i B istnieje język J, taki że $A \leq_{\mathrm{T}} J$ i $B \leq_{\mathrm{T}} J$.

6.15 Wykaż, że dla dowolnego języka A istnieje taki język B, że $A \leq_{\mathrm{T}} B$ i $B \not\leq_{\mathrm{T}} A$.

***6.16** Udowodnij, że istnieją dwa języki A i B, które są nieporównywalne w sensie Turinga – czyli takie, że $A \not\leq_{\mathrm{T}} B$ i $B \not\leq_{\mathrm{T}} A$.

***6.17** Niech A i B będą językami rozłącznymi. Mówimy, że język C *rozdziela* A i B, jeśli $A \subseteq C$ i $B \subseteq \overline{C}$. Opisz dwa rozłączne języki rozpoznawalne w sensie Turinga, których nie da się rozdzielić żadnym językiem rozstrzygalnym.

6.18 Wykaż, że $\overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$ jest rozpoznawalny przez maszynę Turinga z wyrocznią dla języka A_{TM}.

6.19 We wniosku 4.18 pokazaliśmy, że zbiór wszystkich języków jest nieprzeliczalny. Użyj tego wyniku, aby dowieść, że istnieją języki nierozpoznawalne przez maszynę Turinga z wyrocznią A_{TM}.

6.20 Przypomnijmy problem odpowiedniości Posta, zdefiniowany w podrozdziale 5.2, i powiązany z nim język *PCP*. Wykaż, że *PCP* jest rozstrzygalny względem A_{TM}.

6.21 Wykaż, jak obliczyć złożoność obliczeniową słów K(x), dysponując wyrocznią dla A_{TM}.

6.22 Wykorzystaj wynik zadania 6.21, aby podać funkcję f, która jest obliczalna przy użyciu wyroczni A_{TM}, gdzie dla każdego n, $f(n)$ jest niekompresowalnym słowem o długości n.

6.23 Wykaż, że funkcja $K(x)$ nie jest funkcją obliczalną.

6.24 Wykaż, że zbiór słów niekompresowalnych jest nierozstrzygalny.

6.25 Wykaż, że zbiór słów niekompresowalnych nie zawiera żadnego nieskończonego podzbioru rozpoznawalnego w sensie Turinga.

***6.26** Wykaż, że dla dowolnego c istnieją pewne słowa x i y, takie że $K(xy) > K(x)+K(y)+ c$.

6.27 Niech $S = \{\langle M\rangle : M$ jest maszyną Turinga i $L(M) = \{\langle M\rangle\}\}$. Udowodnij, że ani S, ani $\overline{S}$ nie jest rozpoznawalne w sensie Turinga.

6.28 Niech $R \subseteq \mathcal{N}^k$ będzie relacją k-argumentową. Mówimy, że R jest ***definiowalna*** w $\mathrm{Th}(\mathcal{N},+)$, jeśli możemy podać formułę ϕ z k zmiennymi wolnymi $x_1, \ldots, x_k$, taką, że dla wszystkich $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{N}$, $\phi(a_1, \ldots, a_k)$ jest prawdziwe dokładnie wtedy, gdy $a_1, \ldots, a_k \in R$. Wykaż, że każda z poniższych relacji jest definiowalna w $\mathrm{Th}(\mathcal{N},+)$.

[A]**a.** $R_0 = \{0\}$
b. $R_1 = \{1\}$
[A]**c.** $R_= = \{(a, a) : a \in \mathcal{N}\}$
d. $R_< = \{(a, b) : a, b \in \mathcal{N}$ i $a < b\}$

WYBRANE ROZWIĄZANIA

6.3 Załóżmy, że M_1^B rozstrzyga A, zaś M_2^C rozstrzyga B. Użyjemy maszyny Turinga z wyrocznią M_3, takiej że M_3^C rozstrzyga A. Maszyna M_3 symuluje działanie M_1. Za każdym razem, gdy M_1 odpytuje swoją wyrocznię o pewne słowo x, maszyna M_3 sprawdza, czy $x \in B$ i przekazuje odpowiedź do M_1. Ponieważ maszyna M_3 nie dysponuje wyrocznią B i nie może bezpośrednio wykonać tego testu, w celu uzyskania odpowiedzi symuluje M_2 dla słowa wejściowego x. Maszyna M_3 może bezpośrednio uzyskiwać odpowiedzi na zapytania maszyny M_2, gdyż obie maszyny używają tej samej wyroczni, czyli C.

6.5 Zdanie $\exists x\ \forall y\ [x+y=y]$ jest elementem $\mathrm{Th}(\mathcal{N},+)$, gdyż jest prawdziwe przy standardowej interpretacji relacji + dla uniwersum $\mathcal{N}$. Przypomnijmy, że w tym rozdziale używamy $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a zatem możemy użyć $x = 0$. Zdanie $\exists x\ \forall y\ [x+y=x]$ nie jest elementem $\mathrm{Th}(N,+)$, gdyż nie jest prawdziwe w tym modelu. Dla dowolnej wartości x wybranie $y = 1$ powoduje, że $x+y=x$ nie jest spełnione.

6.9 Załóżmy na potrzebny dowodu nie wprost, że pewna maszyna Turinga X rozstrzyga własność P i że P spełnia warunki twierdzenia Rice'a. Jeden z tych warunków stwierdza, że istnieją takie maszyny Turinga A i B, że $\langle A\rangle \in P$ i $\langle B\rangle \notin P$. Użyjemy A i B do skonstruowania maszyny R: